有限幺半群的表示与有限维代数上的模

贺泽远 [i, 1]，何健 [ii]，刘雨喆 [i, 2, *]，李长远 [iii, 3, *]

（i. 贵州大学 数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025
ii. 兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050
iii. 中国人民解放军第 92942 部队, 北京市丰台区 100071）

摘要：本文建立了有限幺半群的表示范畴与有限维代数的模范畴之间的联系．进一步地，利用此联系证明了存在有限维基代数，使得定义在此代数上的交替弦模的同构类数有限，此代数的箭图除源点和沉点以外的其它顶点均为结点，且该代数表示无限．
关键词：半群的表示；半群代数；交替弦；表示无限代数

中图分类号：O152.6; O153.3; O154.1 **文献标志码：**A

On the representation of semi-group and the module of algebra

HE Zeyuan [i], HE Jian [ii], LIU Yu-Zhe [i], LI Changyuan [iii]

（i. Mathematics and Statistics, Guizhou Univ., Guiyang, 550025, China
ii School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou, 730050, China
iii. No.92942 Troops of PLA, 100071, Beijing, P.R. China.）

Abstract: We provide a correspondence between the representation category of a finite semi-group with identity and the module category of a finite-dimensional algebra. Furthermore, by using the above fact, we show that there exists a finite-dimensional algebra such that the number of isoclasses of modules corresponded by alternating strings is finite and all vertices of its quiver do not be nodes, but it is representation-infinite.

Key words: Representation of semi-groups; semi-group algebras; alternating strings; representation-infinite algebras

代数表示理论是代数学领域的主要研究方向之一，其基本思想是通过将一个运算系统(例如群、环、或者代数等) 在某个特殊集合 (例如有限集、Abel 群、或者线性空间等) 上的作用来反映此运算系统的性质．例如，域 $\mathbf{k}$ 上的全体 $n\times n$ 矩阵构成的有限维 $\mathbf{k}$ -代数 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 对 n 维空间 $\mathbf{k}$ -线性空间 V 上的左 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ -作用 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})\times V\to V$，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{v})\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$，在取 $V=\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 时，左 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ -作用给出的完全直和分解 $V\cong\bigoplus_{1\le i\le n}\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})\boldsymbol{E}_{ii}$ 指出 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 上的不可分解投射模在同构意义下唯一，且也是内射模．进而得到 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 的半单性 (参见文献[1]的第 4 章，第 4.1 节) 以及 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{k}$ 的 Morita 等价性 (参见文献[2]，第 I 章，第 I.6 节)．在代数表示理论的研究过程中，Morita[3], Gabriel[4], Grothendieck[5], Auslander, Reiten[6]-[9]等进一步发展了环与代数的箭图表示理论和 Auslander-Reiten 理论，在此基础上，许多代数学家对代数的表示型展开了深入研究．

另一方面，以群在集合上的作用为基础，群表示理论也形成了代数表示理论的另一重要

基金项目：国家自然科学基金 (12401042)；甘肃省青年科技基金(23JRRA825)；贵州省科技厅科学计划项目(黔科合基础-ZK[2024]一般-066)；贵州大学引进人才科研启动基金项目(贵大人基合字(2022)53号, (2022)65 号, (2023)16 号)；贵州大学高等教育研究项目 (申请号 703217243301)；

[1] 第一作者：贺泽远(2000-)，男，贵州贵阳人，硕士研究生，研究方向为同调代数与代数表示论．电话：18285232201, E-mail: 3224555832@qq.com

[2] 通讯作者：刘雨喆 (1992-)，男，贵州遵义人，博士，校聘副教授，研究方向为代数的箭图与几何表示、代数分析及其范畴化．电话:18798007279, E-mail: yzliu3@163.com / liuyz@gzu.edu.cn

[3] 通讯作者：李长远 (1998-)，男，北京人，硕士，研究方向为代数的箭图与几何表示．电话：18595811620, E-mail: 2210502106@cnu.edu.cn

分支. 在此研究思想的基础上, 代数学家们发展了广为人知 Galois 理论, 轨道-稳定子定理(orbit-stabilizer theorem) 以及 Sylow 定理等, 它们可以被用来研究群的结构以及分类问题. 这些理论如今都成为代数理论的通识内容, 并被许多国内外代数学教材着重讲述[10][11][12]. 有限群 G 在有限集合 X 上的作用本质上是 G 中的元素对 X 的所有元素引起置换的行为, 这建立了从有限群 G 到全置换群 $S_X=\{f:X\to X\mid f\text{是双射}\}$ 的群同态 $G\to S_X$, 该群同态被称为群 G 的置换表示. 另一方面, 每一个置换可以被等效为对一个矩阵的行变换, 即 S_X 同构于 $\mathrm{span}_{\mathbf{k}}(X)\cong\mathbf{k}^{\oplus X}$ 上的一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathbf{k}^{\oplus X})$, 这就得到了群 G 的典范表示 $G\to\mathrm{GL}(\mathbf{k}^{\oplus X})$. 典范表示将有限群的元素表达为可逆矩阵[4]. 基于有限群的表示理论的基本思想, 有限幺半群的表示则自然地被定义为从半群到 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 的半群同态[13].

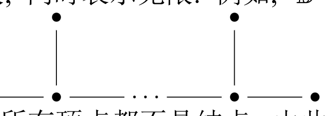
本文所考虑的域 $\mathbf{k}$ 总是代数闭的, 并且为方便起见, 所提到的半群都是有限幺半群, 所提到的代数都是有限维 $\mathbf{k}$-代数. 对给定的代数 A, 定义在 A 上的模均指有限生成左 A-模, 并用记号 A-**mod** 表示相应的有限生成左 A-模范畴; 对给定半群 G, 用记号 $\mathrm{rep}(G)$ 指代 G 的全部表示决定的表示范畴. 两个范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 之间的等价则记为 $\mathcal{C}\approx\mathcal{D}$. 本文将聚焦于半群的表示与代数上的模联系, 并证明下面结论.

定理 1

(1) (见定理 3) 对任意代数 A, 存在半群 G, 使得 $A\text{-}\mathbf{mod}\approx\mathrm{rep}(G)$;

(2) (见定理 4) 对任意半群 G, 存在代数 A, 使得 $\mathrm{rep}(G)\approx A\text{-}\mathbf{mod}$.

进一步地, 在上述结论的基础上可以考虑代数的表示型问题. 这里, 代数的表示型问题指的是对代数上的不可分解模的分类以及分布情况的研究. 最为著名的表示型问题就是 Brauer-Thrall 猜想[14]-[23]. 此外, 对一些特定代数的表示有限性的研究也极具意义, 例如弦代数(string algebra)[9], [24]、温驯代数(gentle algebra)[25], [26]、张量代数[27][28][29]、以及 Clebsch-Gordan 问题[30]-[34]等. 在文献[29]的第 2 节里, 作者构造了一类表示无限的非遗传代数 A, 且它的箭图上的所有顶点都不是结点 (node, 定义见本文第 3 节). 该代数的表示无限性由其附理想箭图上的交替弦给出, 即, 在同构意义下, 交替弦模的个数无限. 容易看到, 存在很多有限维代数, 其交替弦模的同构类数有限, 同时表示无限. 例如, $\widetilde{\mathbb{D}}$-型遗传代数 D, 即箭图形如



的遗传代数. 此时, D 的箭图上的所有顶点都不是结点. 由此可以自然地提出下面问题.

问题 1 是否存在有限维代数 $A=\mathbf{k}Q/I$ 使得:

(a) 箭图 Q 的所有的除源点和沉点以外的顶点都是结点;

(b) A 的交替弦模的同构类数有限;

(c) A 表示无限.

本文的第 3 节将给一个定理 1 的应用, 并用来回答问题 1.

定理 2 (见定理 5) 存在有限幺半群 G, 其半群代数 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ Morita 等价于某个有限维代数 $A=\mathbf{k}Q/I$, 使得 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ 和 A 满足问题 1 所给的条件(a), (b), 和(c).

本文内容安排如下: 第 1 节是预备知识, 回顾半群、群、以及代数的表示理论以及相关基础知识. 第 2 节建立半群的表示范畴与代数的模范畴之间的联系,并给出本文的主要结论. 第 3 节是关于主要结论的一个应用, 并对问题 1 进行回答.

1 预备知识

文章的这一部分将介绍有限幺半群以及有限维 $\mathbf{k}$-代数的一些基本概念.

[4] 群的表示本质上是将抽象的群表示为大家所熟悉的代数系统, 并将群中的元素表达为此代数系统中的元素. 由于群的元素可逆, 因此在用其它代数系统表达群的元素时, 应当选择可逆元素. 因此典范表示将群的元素表达为可逆矩阵, 以便于此表示是保持运算结构的.

1.1 半群及其（典范）表示

我们知道，在代数表示论中，一个群 G 的 $\mathbf{k}$ -表示被定义为群 G 到 $\mathbf{k}$ -线性空间 V 对应的一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的群同态

$$\varphi: G \to \mathrm{GL}(V).$$

其中，V 被称为 φ 的表示空间．当 V 是有限维（分别地，无限维）的，称上述同态是一个有限（分别地，无限）表示．类似地，我们也可以定义半群的 $\mathbf{k}$ -表示.

定义 1 给定半群 G 的一个 $\mathbf{k}$ -表示（$\mathbf{k}$ -representation，简称表示）定义为从 G 到 $\mathbf{k}$ -线性空间 V 的自同态半群 $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 的一个半群同态

$$\varphi: G \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V).$$

特别地，如果 V 是有限维的，则称其为有限表示 (finite-representation)，否则称为无限表示 (infinite-representation)．显然，当 V 的维数 $\dim V = n$ 有限时，有

$$\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V) \cong \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^{\oplus n}) \cong \mathbf{Mat}_n(\mathbf{k}),$$

它是 $n \times n$ 全矩阵代数．此情形下，φ 将 G 中的每个元素对应为 $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 中的矩阵，相应地，其诱导的半群同态 $\tilde{\varphi}: G \to \mathbf{Mat}_n(\mathbf{k})$ 称为半群 G 的 $\mathbf{k}$-矩阵表示或 $\mathbf{k}$-典范表示 (classical $\mathbf{k}$ -representation，仍简称表示，这并不会引起混淆).

为了方便读者，下面回顾一下群表示的等价．一个群 G 的两个表示 $\varphi: G \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 和 $\psi: G \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(W)$ 如果满足下述条件

(1) 存在从 V 和 W 是 $\mathbf{k}$ -线性映射，此 $\mathbf{k}$ -线性映射记为 $\sigma: V \to W$；

(2) σ 能使得图 1 所示的映射图交换.

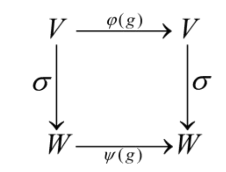


图 1 (半)群表示的等价

Fig.1 The quivalence of representations of (semi-)group

则称 σ 是表示 φ 和 ψ 之间的一个表示同态．特别地，如果 σ 是 $\mathbf{k}$ -线性同构的，则称 φ 和 ψ 表示同构或等价，记作 $\varphi \approx \psi$.

类似地也可以定义半群的两个表示之间的等价.

定义 2 给定半群 G 的两个表示 $\varphi: G \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 和 $\psi: G \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(W)$．如果:

(1) 存在从 V 到 W 的 $\mathbf{k}$ -线性映射 $\sigma: V \to W$；

(2) σ 能使得**图 1** 所示的映射图交换.

则称 σ 是两个表示之间的一个表示同态 (homomorphism of representation，简称同态)．特别地，如果 σ 是 $\mathbf{k}$ -线性同构的，则称 φ 和 ψ 表示同构或等价，并记作 $\varphi \approx \psi$.

1.2 由半群生成的代数

以半群 G 中的元素作为一组基张成的域 $\mathbf{k}$ 上的 $\mathbf{k}$ -线性空间

$$\mathrm{span}_{\mathbf{k}}(G) = \left\{ \sum_{g \in G} k_g g \mid \text{对所有的} g \in G, \text{有} k_g \in \mathbf{k} \right\}$$

记作 $\mathbf{k}\langle G \rangle$．从文献[2]的第 I 章第 I.1 节中知，一个 $\mathbf{k}$-代数指的是同时具有含幺环结构和 $\mathbf{k}$ -线性空间结构的代数系统 $A = (A, +, \cdot, \mathfrak{a})$，使得对任意 $k \in \mathbf{k}$ 以及任意的 $a_1, a_2 \in A$，有 $k(a_1 a_2) = (k a_1) \cdot a_2 = a_1 \cdot (k a_2)$ 成立．特别地，有限维 $\mathbf{k}$-代数 (finite-dimensional $\mathbf{k}$ -algebra，以下简称代数) 指的是这样的一个 $\mathbf{k}$ -代数 A，它作为 $\mathbf{k}$ -线性空间时是一个有限维空间.

例 1 显然，$\mathbf{k}\langle G \rangle$ 是代数，其中，$\mathbf{k}\langle G \rangle$ 上的加法定义为

$$+:\mathbf{k}\langle G\rangle\times\mathbf{k}\langle G\rangle\to\mathbf{k}\langle G\rangle,\quad \sum_{g\in G}k_g g+\sum_{g\in G}k'_g g:=\sum_{g\in G}(k_g+k'_g)g,$$

$\mathbf{k}[G]$上的乘法定义为

$$\cdot:\mathbf{k}\langle G\rangle\times\mathbf{k}\langle G\rangle\to\mathbf{k}\langle G\rangle,\quad \left(\sum_{g\in G}k_g g\right)\left(\sum_{g\in G}k'_g g\right):=\sum_{f\in G}\left(f\sum_{gh=t}k_g k'_h\right).$$

$\mathbf{k}[G]$的线性空间结构则由

$$\mathfrak{a}:\mathbf{k}\times\mathbf{k}\langle G\rangle\to\mathbf{k}\langle G\rangle,\quad k\sum_{g\in G}k_g g:=\sum_{g\in G}kk_g g$$

给出，此时，有$\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[G])={}^{\#}G<+\infty$. $\mathbf{k}\langle G\rangle$被称为由半群 G 生成的代数.

1.3 由箭图生成的代数

一个(有限)箭图 (quiver) 指的是满足下述条件的四元组$Q=(Q_0,Q_1,s,t)$:

(1) Q_0，Q_1是集合，其元素个数有限.

(2) $s,t:Q_1\to Q_0$是映射.

其中，Q_0和Q_1分别称为顶点集合 (vertex set) 和箭向集合 (arrow set)，其中的元素分别称为顶点 (vertex) 和箭向 (arrow). 对每个箭向$\alpha\in Q_1$，$s(\alpha)$和$t(\alpha)$分别称为此箭向的起点 (source) 和终点 (sink). 此外，一个箭图的顶点如果不是任何箭向的终点 (分别地，起点)，则称它是源点 (source) (分别地，汇点 (sink)).

进一步地，Q上的一条 (长度n的) 路 (path (with length n)) 是一个由Q_1中的箭向构成的序列

$$\wp=(v\mid\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\mid w)\quad(\text{简写为}\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n),$$

其中，$v=s(\alpha_1)$，$w=t(\alpha_n)$，$t(\alpha_i)=s(\alpha_{i+1})$ ($\forall 1\le i<n$). 特别当$n=0$时，上式改写为$\wp=(v\mid\mid v)$，并简写为ε_v. Q上全体长度n的路构成的集合记作Q_n，并用$\mathbf{k}Q_n$表示由Q_n张成的向量空间. 则直和$\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{k}Q_n=:\mathbf{k}Q$是$\mathbf{k}$-代数 (维数可以是无限的)，其环结构按下式诱导的张量$\otimes:\mathbf{k}Q_n\times\mathbf{k}Q_m\to\mathbf{k}Q_{m+n}$给出.

$$(u\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_m\mid v_1)\otimes(v_2\mid\beta_1,\ldots,\beta_n\mid w):=\begin{cases}(u\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n\mid w), & v_1=v_2;\\ 0, & v_1\ne v_2\end{cases}$$

定义 3[2]，第 II 章，第 II.1 节 由箭图Q定义的$\mathbf{k}$-代数$\mathbf{k}Q$被称为一个路代数 (path algebra). 由路代数$\mathbf{k}Q$及其理想I决定的商$\mathbf{k}Q/I$称为一个箭图代数 (quiver algebra)，(Q,I)称为此箭图代数的附理想箭图或有界箭图 (bound quiver).

注意到$Q\times Q$可以看成无交并$Q\times Q=\dot{\bigcup}_{m,n\in\mathbf{N}}Q_m\times Q_n$，同时，对任意$m,n\in\mathbf{N}$，张量$\otimes$可以限制到$Q_n\times Q_m$上，令

$$\widehat{Q}:=\{0\}\cup Q=\{0\}\cup\dot{\bigcup_{l\in\mathbf{N}}}Q_l,$$

并令对任意$l\in\mathbf{N}$，有$\mathrm{Im}(\otimes|_{\{0\}\times Q_l})=\mathrm{Im}(\otimes|_{Q_l\times\{0\}})=\{0\}$. 由此，可自然地诱导$\widehat{Q}\times\widehat{Q}$上的张量$\otimes|_{\widehat{Q}\times\widehat{Q}}:\widehat{Q}\times\widehat{Q}\to\widehat{Q}$使得$(\otimes|_{Q\times Q})|_{Q_m\times Q_n}=\otimes|_{Q_m\times Q_n}$. 于是，可立刻得到下面结论.

引理 1 箭图Q装备张量积$\otimes|_{\widehat{Q}\times\widehat{Q}}$定义了半群$(\widehat{Q},\otimes)$，使得$\mathbf{k}Q/I=\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I$，其中$I$是由一些路张成的$\mathbf{k}Q$的子空间.

例 2 给定箭图Q，其顶点集合为$Q_0=\{1,2,3\}$，箭向集合为$Q_1=\{a,b,c\}$，函数$s:Q_1\to Q_2$由对应法则$a\mapsto 1$，$b\mapsto 2$，$c\mapsto 1$给定，函数$t:Q_1\to Q_2$由对应法则$a\mapsto 2$，$b\mapsto 3$，$c\mapsto 3$对应.于是，可以得到Q如图 2 所示. 于是，$\widehat{Q}=\{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,a,b,c,ab\}$. 下面给出了三个关于路

的张量的具体算例，从这些算例的使用的运算法则可以看出 $\widehat{Q}$ 是半群.

$a\otimes b=a\otimes|_{Q_1\times Q_1}\ b=(1|a|2)\otimes(2|b|3)=(2|a,b|3)=ab\in Q_2$；

$c\otimes(a\otimes b)=c\otimes|_{Q_1\times Q_2}\ (a\otimes|_{Q_1\times Q_1}\ b)=(1|c|3)\otimes|_{Q_1\times Q_2}\ (1|a,b|3)=0\in\{0\}$；

$(c\otimes a)\otimes b=(c\otimes|_{Q_1\times Q_1}\ a)\otimes|_{Q_2\times Q_1}\ b=0\otimes|_{\{0\}\times Q_1}\ (2|b|3)=0\in\{0\}$.

$$1\xrightarrow{a}2\xrightarrow{b}3,\quad 1\xrightarrow{c}3$$

图 2 例 2 中的箭图 Q

Fig.2 The quiver in Example 2

由 $\widehat{Q}$ 生成的代数 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 是以 $\widehat{Q}$ 为基张成的 $\mathbf{k}$ -线性空间，即

$$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle=\mathbf{k}\{0\}\oplus\mathbf{k}\varepsilon_1\oplus\mathbf{k}\varepsilon_2\oplus\mathbf{k}\varepsilon_3\oplus\mathbf{k}a\oplus\mathbf{k}b\oplus\mathbf{k}c\oplus\mathbf{k}ab\,.$$

注意 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 上有环结构 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle=(\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle,+,\otimes)$，其中 $\otimes:\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle\times\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle\to\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 的定义通过定义在 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 的基 $\widehat{Q}$ 上的张量 $\otimes|_{\widehat{Q}\times\widehat{Q}}$ 给出. 由于 $\mathrm{Im}(\otimes|_{\{0\}\times\widehat{Q}})=\mathrm{Im}(\otimes|_{\widehat{Q}\times\{0\}})=\{0\}$，可知对任意的 $k\in\mathbf{k}$ 和 $p\in Q$ 有 $(k\cdot 0)\otimes p=0$，所以 $\mathbf{k}\{0\}$ 仅包含元素 0，它是 $(\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle,+,\otimes)$ 中的零元. 进一步，就有：

$$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle=\mathbf{k}\varepsilon_1\oplus\mathbf{k}\varepsilon_2\oplus\mathbf{k}\varepsilon_3\oplus\mathbf{k}a\oplus\mathbf{k}b\oplus\mathbf{k}c\oplus\mathbf{k}ab=\mathbf{k}Q\,,$$

上式为引理 1 提供了一个在 $I=0$ 的情形下的一个算例. 特别地，如果取 $I=\langle ab\rangle$，则上式可导出

$$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I=\mathbf{k}\varepsilon_1\oplus\mathbf{k}\varepsilon_2\oplus\mathbf{k}\varepsilon_3\oplus\mathbf{k}a\oplus\mathbf{k}b\oplus\mathbf{k}c+\langle ab\rangle=\mathbf{k}Q/I\,,$$

这就为引理 **1** 提供了一个在 $I\neq 0$ 的情形下的算例.

2 半群的表示与代数上的模

文章的这一部分将指出一个半群的表示可以诱导一个代数上的模. 反之，一个代数上的模也可以诱导出一个半群的表示.

2.1 从半群表示到半群代数上的模

代数 $A=(A,+,\cdot,\mu)$ 上的一个左 A-模 (right A-module，以下简称 A-模) 是满足下述条件的一个 $\mathbf{k}$ -线性空间 M：

(1) A 对 M 有一个左侧作用 $A\times M\to M$，使得在 A 作为环 $A=(A,+,\cdot)$ 的意义下，M 是定义在 A 上的左模，即，对任意的 $m,m_1,m_2\in M$ 和 $a,a_1,a_2\in A$，有：

  (a) $1_A m=m$；

  (b) $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$；

  (c) $(a_1+a_2)m=a_1m+a_2m$；

  (d) $(a_1a_2)m=a_1(a_2m)$.

(2) 对任意的 $m\in M$，$a\in A$，和 $k\in\mathbf{k}$，有

$$k(am)=(ka)m=a(km)\,.$$

下文的引理 2 表明了半群 G 的表示 $\varphi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 与代数 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ 上的 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ -模之间有着密不可分的联系.

引理 2 半群 G 的表示 $\varphi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 诱导了代数 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ 对 $\mathbf{k}$ -线性空间 V 的左 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ -线性作用

$$\mathbf{k}\langle G\rangle\times V\to V,\ (a,\boldsymbol{v})\mapsto\tilde{\varphi}_a(\boldsymbol{v})$$

使得 V 是 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ -模，其中，$\tilde{\varphi}$ 是由 φ 自然提升的一个形如 $\mathbf{k}\langle G\rangle\to\mathrm{GL}(V)$ 的 $\mathbf{k}$ -线性映射，且 $\tilde{\varphi}_a=\tilde{\varphi}(a)$.

证明 由 $\varphi: G \to \mathrm{GL}(V)$ 以及 $\mathbf{k}\langle G\rangle = \mathrm{span}_{\mathbf{k}}(G)$ 可知 φ 将 $\mathbf{k}\langle G\rangle$ 的基 $G=\{g_i \mid 1\le i\le n\}$ 映射为 $\mathrm{GL}(V)$ 中的一组元素 $\varphi(G)=\{\varphi(g_i)\mid 1\le i\le n\}$，因此 φ 可以 $\mathbf{k}$-线性延拓为 $\mathbf{k}$-线性映射

$$\tilde{\varphi}: \mathbf{k}\langle G\rangle \to \mathrm{GL}(V),\ \sum_{i=1}^{n} k_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi(g_i).$$

于是，对任意 $a=\sum_{i=1}^{n} k_i g_i \in \mathbf{k}\langle G\rangle$，$\tilde{\varphi}$ 诱导了一个按 $a\boldsymbol{v} := \tilde{\varphi}_a(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^{n} k_i \tilde{\varphi}_{g_i}(\boldsymbol{v})$ 定义的左 $\mathbf{k}\langle G\rangle$-作用 $\mathbf{k}\langle G\rangle \times V \to V$.

任取 $a=\sum_{i=1}^{n} k_i g_i$，$b=\sum_{i=1}^{n} l_i g_i$，有

$$(a+b)\boldsymbol{v} = \tilde{\varphi}_{a+b}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i)\varphi(g_i),$$

上式的第二个等号的成立由半群 G 上的运算 $a+b=\sum_{i=1}^{n}(k_i+l_i)g_i$ 给出. 此外，有

$$a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v} = \varphi_a(\boldsymbol{v}) + \varphi_b(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} k_i\varphi(g_i) + \sum_{i=1}^{n} l_i\varphi(g_i) = \sum_{i=1}^{n}(k_i+l_i)\varphi(g_i),$$

进而 $(a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$，即(b)成立.通过类似的方法可以证明(a), (c), 以及(d).□

2.2 从代数上的模到半群的表示

对代数 A，其必存在一组完全本原正交幂等元组 (compete set of primitive orthogonal idempotent)，即由满足下述条件的幂等元构成的集合 $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$.

(1) 对任何 $i\ne j$，有 $e_ie_j=0$；

(2) 如果 e_i 能分解为幂等元 e_{i1} 和 e_{i2} 的和，则 e_{i1} 和 e_{i2} 至少一者为 0.

完全本原正交幂等元组为代数 A 提供了一个直和分解

$$A=\bigoplus_{1\le i\le n} Ae_i,$$

使得每个直和项 Ae_i 是不可分解投射模，且在同构意义下，$Ae_1,\dots,Ae_n$ 遍历了所有的不可分解投射模. 然而，可能存在 $i\ne j$ 使得 $Ae_i \cong Ae_j$，即 A 的直和分解中可能有重复的直和项. 习惯上，将这样的代数称为非基的 (non-basic). 与之相对的，如果对任意 $i\ne j$，总有 $Ae_i \ncong Ae_i$，则称 A 是基代数 (basic algebra)，参见文献[2]的第 I 章，第 I.6 节.

引理 3[[2], 第 I 章, 推论 6.10] 对任意有限维代数 A，存在基代数 A^{basi} 使得模范畴 A-**mod** 与 A^{basi}-**mod** 之间存在加性等价.

引理 3 中给出的 A 与 A^{basi} 的模范畴之间的等价同时也是定义在全体代数上的一个等价关系，该等价关系被称为 Morita 等价.

引理 4 基代数 $A=\mathbf{k}Q/I$ 上的模 M 诱导了一个半群 $\widehat{Q}$ 上的表示.

证明 取 A-模 M，则存在 A 对 $\mathbf{k}$-线性空间 M 的左 A-线性作用 $A\times M\to M$，$(a,m)\mapsto a.m$，该作用诱导了一个从 A 到 $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M)$ 的代数同态

$$A=\mathbf{k}Q/I \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M),\ a\mapsto (h_a: m\mapsto a.m).$$

再由引理 1，即得代数同态

$$\widehat{\varphi}: \mathbf{k}\langle \widehat{Q}\rangle / I \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M),\ a\mapsto (h_a: m\mapsto a.m).$$

在 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 的基 $\widehat{Q}$ 中任取一个元素 p，它是箭图 Q 上的一条路，设其长度为 $l\,(\in\mathbf{N})$. 由 p 是 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle$ 中的元素可知它自然也是 $\mathbf{k}Q$ 中的元素. 从而对 $p+I\in\mathbf{k}Q/I=A$，有

$$\widehat{\varphi}(p+I) = \widehat{\varphi}|_{Q_l+I}(p+I) = (h_{p+I}: m\mapsto (p+I).m).$$

它诱导了

$$\varphi:\ \widehat{Q}\to \mathbf{Mat}_{\dim_{\mathbf{k}} M}(\mathbf{k}),\ p\mapsto h_{p+I},$$

使得对任意 $p=(u\mid a_1,\dots,a_s\mid v)$，$q=(v\mid b_1,\dots,b_t\mid w)$，有

$$
\begin{aligned}
\varphi(p\otimes q) &= \varphi(p\otimes|_{Q_s\times Q_t}\, q)=\varphi((u\,|\,a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_t\,|\,w))\\
&=(h_{pq+I}:m\mapsto (pq+I).m)\\
&=\left(h_{p+I}\circ h_{q+I}:m\overset{h_{q+I}}{\mapsto}(q+I).m\overset{h_{p+I}}{\mapsto}(p+I).((q+I).m)\right)\\
&=\varphi(p)\circ\varphi(q).
\end{aligned}
$$

这表明φ保持乘法运算，因而是半群同态，该半群同态就是半群$\widehat{Q}$的一个表示.□

半群G的子半群N如果正规 (normal)，即对任意$g\in G$有$g^{-1}Ng\subseteq N$，则它诱导了新的半群$G/N=\{gN\,|\,g\in G\}$，称为G的商半群，简称商 (quotient). 显然，在箭图Q给定的半群$\widehat{Q}$中，用$I=\langle p_1,\dots,p_n\rangle$表示包含$\{p_1,\dots,p_n\}$的一个$\widehat{Q}$的最小正规子半群，则得到商半群$\widehat{Q}/I$. 关于商半群，引理 **4** 可以有如下更进一步的结果.

引理 5 基代数$A=\mathbf{k}Q/I$上的模M诱导了一个商半群$\widehat{Q}/I$上的表示.

证明 路代数$\mathbf{k}Q$上的张量$\otimes:\mathbf{k}Q\times\mathbf{k}Q\to\mathbf{k}Q$自然地诱导了基代数$\mathbf{k}Q/I$上的张量

$$\overline{\otimes}:\mathbf{k}Q/I\times\mathbf{k}Q/I\to\mathbf{k}Q/I,$$

接下来的证明与引理 **4** 的证明类似. 仍由引理 **1**，有代数同态

$$\hat{\varphi}:\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I=\mathbf{k}\langle\widehat{Q}/I\rangle\to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M),\quad a\mapsto(h_a:m\mapsto a.m)$$

并在$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}/I\rangle$的基$\widehat{Q}/I$中任取一个元素$p+I$，它可以视为$A=\mathbf{k}Q/I$中的元素，因此仍有

$$\hat{\varphi}(p+I)=\hat{\varphi}|_{Q_l+I}(p+I)=(h_{p+I}:m\mapsto(p+I).m).$$

于是有限制映射

$$\varphi:=\hat{\varphi}|_{\widehat{Q}}:\ \widehat{Q}/I\to\mathbf{Mat}_{\dim_{\mathbf{k}}M}(\mathbf{k}),\quad p+I\mapsto h_{p+I},$$

使得对任意$p=(u\,|\,a_1,\dots,a_s\,|\,v)$，$q=(v\,|\,b_1,\dots,b_t|w)$，有

$$\varphi((p+I)\overline{\otimes}(q+I))=h_{pq+I}=h_{p+I}\circ h_{q+I}=\hat{\varphi}|_{\widehat{Q}}(p+I)\circ\hat{\varphi}|_{\widehat{Q}}(q+I)=\varphi(p+I)\circ\varphi(q+I).$$

这表明φ是半群同态，且该半群同态就是半群$\widehat{Q}/I$的一个表示.□

2.3 代数的模范畴与半群的表示范畴

给定半群G，并用记号$\mathrm{rep}(G)$表示由全体G的表示为对象，G的表示之间的同态作为有向的二元关系构成的数据整体. 则对下面的两个同态（也即$\mathrm{rep}(G)$中的有向的二元关系）

$$\sigma_1:(\varphi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(U))\to(\psi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V)),$$
$$\sigma_2:(\psi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V))\to(\phi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(W)),$$

其给定的有向的二元关系的复合

$$\sigma_2\circ\sigma_1:(\varphi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(U))\to(\phi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(W))$$

保证了图 3 所示的态射图是交换.

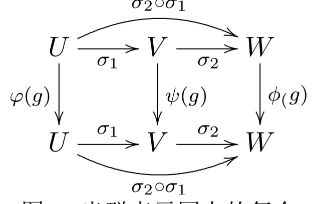


图 3 半群表示同态的复合

Fig.3 The composition of two representations of a semi-group

由此可以容易地验证$\mathrm{rep}(G)$是一个范畴，称其为表示范畴 (representation category).

给定基代数$A=\mathbf{k}Q/I$，其中I是路代数$\mathbf{k}Q$的理想. 下面结论建立了A-**mod** 和$\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$之间的联系.

命题 1

(a) 有限维路代数 $A = \mathbf{k}Q$ 的模范畴 A-**mod** 和半群 $\widehat{Q}$ 的表示范畴 $\mathrm{rep}(\widehat{Q})$ 等价;

(b) 有限维基代数 $A = \mathbf{k}Q/I$ 的模范畴 A-**mod** 和商半群 $\widehat{Q}/I$ 的表示范畴 $\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$ 等价.

证明 先证 (b). 由引理 1 知 $A\text{-}\mathbf{mod} = \mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I\text{-}\mathbf{mod}$，故需证 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I\text{-}\mathbf{mod} \approx \mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$. 首先，引理 2 给出了

$$H : \mathrm{rep}(\widehat{Q}/I) \to \mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I\text{-}\mathbf{mod},$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_X & \longmapsto & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(h)} \\ \varphi_Y & \longmapsto & Y \end{array}$$

其中:

(A) 对任意 $\mathbf{k}$-线性空间 X，φ_X 是商半群 $\widehat{Q}/I$ 的某个表示 $\varphi_X : \widehat{Q}/I \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X)$，$p+I \mapsto (\varphi_X)_{p+I}$，$H$ 将此表示按引理 2 对应到由左 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I$-作用

$$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I \times X \to X,\ (p+I, x) \mapsto (p+I).x := (\varphi_X)_{p+I}(x) \tag{1}$$

给定的模 X;

(B) 同时，$\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$ 中的态射 $h : \varphi_X \to \varphi_Y$ (它可以看成 $\mathbf{k}$-线性映射 $h : X \to Y$，且对任意 $p \in \widehat{Q}$，$h \circ (\varphi_X)_{p+I} = (\varphi_Y)_{p+I} \circ h$ 成立) 在 H 的作用下被映射为

$$H(h) : X \to Y, x \mapsto h(x).$$

注意这里需对 $H(h)$ 是 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I$-模同态进行验证，以确保 H 的定义是有效的. 为此，任取 $p \in \widehat{Q}$ 和 $x \in X$，需验证 $H(h)((p+I).x) = (p+I).(H(x))$，具体验证过程如下:

$$\begin{aligned} H(h)((p+I).x) &= h((\varphi_X)_{p+I}(x)) = h \circ (\varphi_X)_{p+I}(x) \\ &\overset{(*)}{=} (\varphi_Y)_{p+I} \circ h(x) = (\varphi_Y)_{p+I}(H(x)) = (p+I).(H(x)), \end{aligned}$$

其中，(*) 由 $h \circ (\varphi_X)_{p+I} = (\varphi_Y)_{p+I} \circ h$ 给出.

于是，容易验证 H 是一个函子.

其次，引理 **5** 给出了

$$F : \mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I\text{-}\mathbf{mod} \to \mathrm{rep}(\widehat{Q}/I), \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & F(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Y & \longmapsto & F(Y) \end{array}$$

其中:

(C) 对任意 A-模 X，$F(X)$ 是由 A 对 X 的左 A-作用 $A \times X \to X$，$(a,x) \mapsto a.x$ 诱导的半群表示 $\varphi_X : \widehat{Q}/I \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X)$，$p+I \mapsto (x \mapsto (p+I).x)$;

(D) 同时，$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I\text{-}\mathbf{mod}$ 中的模同态 $f : X \to Y$ 被 F 映射 $\mathbf{k}$-线性映射 $F(f) : X \to Y$，$x \mapsto f(x)$. 注意到对任意的 $p+I \in \widehat{Q}/I$ 和 $x \in X$，有

$$\begin{aligned} (F(f) \circ (\varphi_X)_{p+I})(x) &= f((\varphi_X)_{p+I}(x)) = f((p+1).(x)) \\ &\overset{(**)}{=} (p+1).f(x) = (\varphi_Y)_{p+I}(F(f)(x)) = ((\varphi_Y)_{p+I} \circ F(f))(x), \end{aligned}$$

其中，(**) 由 f 是 A-模同态得到. 所以，$F(f)$ 是 $\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$ 中的态射.

于是，容易验证 F 是一个函子.

再者，根据(A)，对商半群 $\widehat{Q}/I$ 的表示

$$\varphi_X : \widehat{Q}/I \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X),\ \ p+I \mapsto (\varphi_X)_{p+I},$$

$H(\varphi_X)$是按(1)给定的$\mathbf{k}\langle\widehat{Q}\rangle/I$-模$X$，用函子$F$作用到$X$上，由(C)可得到$\widehat{Q}/I$的另一表示

$$F(X):\widehat{Q}/I\to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X),\quad p+I\mapsto(x\mapsto(p+I).x).$$

由$(\varphi_X)_{p+I}:x\mapsto(p+I).x$可知定义在$X$上的恒等映射给出了半群$\widehat{Q}/I$的表示$\varphi_X$和$F(X)$的等价，因此，$F\circ H=\mathrm{id}$. 类似地，通过(C)(A)也可以证明$H\circ F=\mathrm{id}$，因此函子$H$和$F$给出了两个范畴的全体对象的同构类$\mathrm{Ob}(\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I))$和$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}Q/I\text{-}\mathbf{mod})$之间的双射.

最后，在H和F建立了$\mathrm{Ob}(\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I))$和$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}Q/I\text{-}\mathbf{mod})$之间的双射这一基础上，(B)(D)给出了$\mathrm{Hom}_{\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)}(\varphi_X,\varphi_Y)$和$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q/I\text{-}\mathbf{mod}}(X,Y)$之间的双射. 综上可知$H$和$F$建立了模范畴和半群表示范畴之间的等价.

对于命题(a)的证明，只需在(b)中取$I=\{0\}$，且在每个使用引理 **5** 进行论证的过程中，改用引理 **4** 即得所证.□

2.4 主要结论

下面给出本文的主定理.

定理 3 对任意代数A，存在半群G，使得A-**mod**和$\mathrm{rep}(G)$等价，该等价将A-模X的同构类对应为形如$G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X)$的半群同态.

证明 首先，由引理 **3** 可知存在基代数$B=A^{\mathrm{basi}}$使得A-**mod**和B-**mod**加性等价. 再者，根据文献[2]第 III 章的定理 3.7 如果B不是两个以上代数的直积，则存在箭图Q使得$B\cong\mathbf{k}Q/I$，这里I是路代数$\mathbf{k}Q$的某个理想；否则，设B有一个完全 Cartesian 乘积分解$B=\prod_{i=1}^{m}B_i$，使得每个 Cartesian 因子项B_i不是两个以上代数的直积，进而存在箭图$Q^{(i)}$以及$\mathbf{k}Q^{(i)}$的理想$I^{(i)}$使得$B_i\cong\mathbf{k}Q^{(i)}/I^{(i)}$，此时令$Q=\bigcup_{i=1}^{m}Q^{(i)}=(\bigcup_{i=1}^{m}Q_0^{(i)},\bigcup_{i=1}^{m}Q_1^{(i)},s,t)$，就有

$$B=\prod_{i=1}^{m}B_i\cong\prod_{i=1}^{m}\mathbf{k}Q^{(i)}/I^{(i)}=\mathbf{k}Q/I.$$

综上，总存在箭图Q使得$B\cong\mathbf{k}Q/I$，于是有范畴等价B-**mod**$\approx\mathbf{k}Q/I$-**mod**. 该等价将B-模对应为$\mathbf{k}Q/I$-模. 另一方面，根据命题 **1**(b)，$\mathbf{k}Q/I$-**mod**$\approx\mathrm{rep}(\widehat{Q}/I)$，该等价将$\mathbf{k}Q/I$-模对应为半群$G:=\widehat{Q}/I$的表示. 所以有下面范畴的等价链:

$$A\text{-}\mathbf{mod}\approx B\text{-}\mathbf{mod}\approx\mathbf{k}Q/I\text{-}\mathbf{mod}\approx\mathrm{rep}(G)$$

该等价链首先将A-模X的同构类$[X]$通过等价函子$\mathrm{res}:=\varepsilon(-):A\text{-}\mathbf{mod}\to B\text{-}\mathbf{mod}$对应为$B$-模$\varepsilon X$；然后，由$B\cong\mathbf{k}Q/I$诱导的等价函子$T:B\text{-}\mathbf{mod}\to\mathbf{k}Q/I$将$\varepsilon X$自然地视为$\mathbf{k}Q/I$-模，最后，通过 (2) 将$\varepsilon X$对应到$\mathrm{rep}(G)$中的表示$G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\varepsilon X)$，$p+I\mapsto(p+I).\varepsilon x$.□

下面结论是定理 3 的逆.

定理 4 对任意半群G，存在基代数A使得$\mathrm{rep}(G)$和A-**mod**等价，该等价将半群的表示$G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X)$对应为某个$A$-模.

证明 半群G生成的$\mathbf{k}$-向量空间$\mathbf{k}\langle G\rangle$是一个代数. 任取$\mathbf{k}$-向量空间$X$，半群$G$的表示$\varphi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(X)$，$g\mapsto\varphi_g$诱导了$X$的$\mathbf{k}\langle G\rangle$-模结构$\mathbf{k}\langle G\rangle\times X\to X$，$(g,x)\mapsto g.x:=\varphi_g(x)$；反之，任给$\mathbf{k}\langle G\rangle$-模$Y$，则由模的定义可知存在左$\mathbf{k}\langle G\rangle$-作用$\mathbf{k}\langle G\rangle\times Y\to Y$，$(g,y)\mapsto gy$，它也给出了半群$G$的表示$\phi:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Y)$，$g\mapsto(y\mapsto gy)$. 于是，类似引理 4 和引理 5 的证明，可以得到$\mathrm{rep}(G)\cong\mathbf{k}\langle G\rangle$-**mod**. 另一方面，根据引理 3，可以令代数A是基代数使得$\mathbf{k}\langle G\rangle$-**mod**$\approx A$-**mod**，于是得$\mathrm{rep}(G)\cong A$-**mod**.□

3 在表示型上的应用

箭图代数$\mathbf{k}Q/I$的箭图Q上的顶点v如果满足下述条件:

(1) 存在 $a,b\in Q_1$ 使得 $t(a)=s(b)$；

(2) 对任意满足 $t(a)=s(b)$ 的箭向 $a,b\in Q_1$ 有 $ab\in I$.

则称 v 是一个结点. 这一部分回答问题 1. 对任意自然数 $i\in\mathbf{N}$，始终用记号 $G^{(t)}$ 表示集合 $\left\{\boldsymbol{E}_{11}^{(t)}=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\boldsymbol{E}_{22}^{(t)}=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\boldsymbol{E}_{21}^{(t)}=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right\}$，显然 $G^{(t)}$ 关于矩阵乘法是一个半群. 于是，$\mathbf{k}\langle G^{(t)}\rangle\cong\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{k}&0\\\mathbf{k}&\mathbf{k}\end{smallmatrix}\right)$是 2×2 的下三角矩阵代数，记作 $X^{(t)}$. 记 $X^{\dagger n}=\bigoplus_{t=1}^{n}(X^{(t)})^{\oplus t!}$，其元素形如

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{X}^{(n)}),$$

其中，第 t 分量 $\boldsymbol{X}^{[n]}$ 是 $\mathbf{k}$ -线性空间 $(X^{(t)})^{\oplus t!}$ 中的矩阵 $(\boldsymbol{X}_1^{(t)},\boldsymbol{X}_2^{(t)},\ldots,\boldsymbol{X}_{t!}^{(t)})^T$. 对 $1\le u\le t!$，令

$$\boldsymbol{X}_{u,ij}^{(t)}:=(\mathbf{0},\ldots\mathbf{0},\overset{u}{\boldsymbol{E}_{ij}},\mathbf{0}\ldots,\mathbf{0})^T\in(X^{(t)})^{\oplus t!},$$

则集合 $\bigcup_{t=1}^{n}\{\boldsymbol{X}_{u,ij}^{(t)}\mid 1\le u\le t!,i=j\}$ 是不交并，同时也是 $X^{\dagger n}$ 的一个完全本原正交幂等元组. 再令 $P^{\dagger n}$ 是由 $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\boldsymbol{X}_{i_r,22}^{(r)},-\boldsymbol{X}_{(i_r-1)(r+1)+j_r,22}^{(r+1)},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$ （其中 $1\le i_r\le r$，$1\le j_r\le r+1$）生成的 $X^{\dagger n}$ 的理想.

定义 4 商代数 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ 称为 n 阶散射箭图代数 (algebra with diffuse quiver).

引理 6 存在半群 G 使得 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ -**mod** $\approx\mathbf{k}\langle G\rangle$-**mod**.

证明 设 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ 的箭图为 $Q^{\dagger n}$，则有 1-1 对应 $\sigma:\bigcup_{t=1}^{n}\{\boldsymbol{X}_{u,ij}^{(t)}\mid 1\le u\le t!,i=j\}\leftrightarrow Q_0^{\dagger n}$，且

$$\mathrm{rad}(X^{\dagger n}/P^{\dagger n})\cong\bigoplus_{t=1}^{n}(\mathrm{rad}(X^{(t)}))^{\oplus t!}\cong\bigoplus_{t=1}^{n}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\mathbf{k}&0\end{smallmatrix}\right)^{\oplus t!}$$

于是，有 $\mathbf{k}$ -线性同构

$$\boldsymbol{X}_{u,ij}^{(t)}\left(\mathrm{rad}(X^{\dagger n}/P^{\dagger n})\right)\boldsymbol{X}_{v,i'j'}^{(s)}\cong_{\mathbf{k}}\begin{cases}\mathrm{rad}(X^{(t)})\cong_{\mathbf{k}}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\mathbf{k}&0\end{smallmatrix}\right), & \text{如果 } {\scriptstyle s=t+1,i=j=2,\ i'=j'=1,(u-1)t\le v<ut;}\\ 0, & \text{其它情形.}\end{cases}$$

这就得到 $Q_1^{\dagger n}=\{\alpha_{t,t+1,u,v}:\sigma(\boldsymbol{X}_{u,11}^{(t)})\to\sigma(\boldsymbol{X}_{v,22}^{(t+1)})\mid(u-1)t\le v<ut\}$ (参考图 4，它给出了 4 阶散射箭图代数的箭图). 于是，对半群 $\widehat{Q^{\dagger n}}/P^{\dagger n}$ 决定的代数 $\mathbf{k}\langle\widehat{Q^{\dagger n}}/P^{\dagger n}\rangle$，有 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ -**mod** $\approx$ $\mathbf{k}\langle\widehat{Q^{\dagger n}}/P^{\dagger n}\rangle$- **mod**.

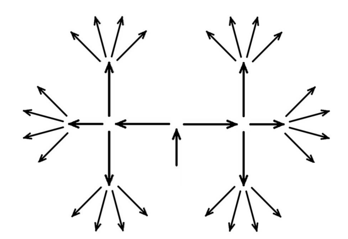


图 4　4 阶散射箭图代数的箭图

Fig.4 The quiver of 4-algebra with diffuse quiver

引理 7 设散射箭图代数 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ 的箭图为 $Q^{\dagger n}$，则 $Q^{\dagger n}$ 上除源点和沉点以外的所有顶点都是结点.

证明 事实上，由引理 6 的证明可立刻推出 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}\cong\mathbf{k}Q^{\dagger n}/\mathrm{rad}^2(\mathbf{k}Q^{\dagger n})$，因此对 $Q^{\dagger n}$ 上任意长度 2 的路 ab 都有 $ab\in P^{\dagger n}$，进而任意除源点和沉点之外的顶点都是结点.□

交替弦指的是附理想箭图 (Q,I) 上形如 $\cdots\leftarrow\bullet\rightarrow\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow\cdots$ 的一个箭向序列 (特别地，每一个箭向可以看成一个长度 1 的交替弦，每一个顶点可以看成一个长度 0 的交替弦). 在不考虑箭向序列正反序的情况下，每一个交替弦都能对应到一个不可分解模的同构类，该同构类内的不可分解模称为交替弦模.

引理 8 散射箭图代数 $X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$ 上的非单交替弦模的同构数为 $\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(t+1)!<+\infty$.

证明 显然$(Q^{\dagger n}, I^{\dagger n})$上的交替弦只有箭向以及形如$\bullet\!\leftarrow\!\bullet\!\rightarrow\!\bullet$的交替弦，因此交替弦模的维数一定是 2 或 3. 注意 2 维交替弦模是由箭向对应的不可分解模，因此，在同构意义下，2 维和 3 维交替弦模的个数分别为

$$^{\#}Q_1^{\dagger n} = \sum_{t=1}^{n} t!\text{和} \quad \sum_{t=2}^{n}(t-1)!\mathrm{C}_t^2$$

因此，交替弦模同构类数为

$$\sum_{t=1}^{n} t! + \sum_{t=2}^{n}(t-1)!\mathrm{C}_t^2 = 1 + \sum_{t=2}^{n}\left(t! + (t-1)!\frac{t(t-1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(t+1)! \ .\square$$

定理 5 存在代数A满足问题 **1** 的条件(a)，(b)，和(c).

证明 根据引理 6，引理 7，引理 8 可知散射箭图代数$X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$满足问题 1 的(a)和(b). 当$n \geqslant 4$时，$X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$以$X^{\dagger 4}/P^{\dagger 4}$为子箭图代数，且每个不可分解$X^{\dagger 4}/P^{\dagger 4}$-模可以被自然地视为$X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$-模（这是因为有同构$X^{\dagger 4}/P^{\dagger 4} \cong (X^{\dagger n}/P^{\dagger n}) \,/\, \langle \bigcup_{t\geq 5}^{n}\{\boldsymbol{X}_{u,ij}^{(t)} \mid 1 \leq u \leq t!, i = j\}\rangle$). $X^{\dagger 4}/P^{\dagger 4}$的箭图如图 4 所示，它包含 6 个 Euclid $\widetilde{\mathbb{D}}_4$型遗传代数D作为子箭图代数，因此有范畴的嵌入$D\text{-}\mathbf{mod} \subseteq X^{\dagger 4}/P^{\dagger 4}\text{-}\mathbf{mod} \subseteq X^{\dagger n}/P^{\dagger n}\text{-}\mathbf{mod}$. 注意$D$表示无限，所以$X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$表示无限. 因此，对任意$n \geqslant 4$，$X^{\dagger n}/P^{\dagger n}$也满足问题 1 的(c).$\square$

4 总结与展望

本文给出了有限幺半群的表示范畴与有限维代数的模范畴之间的联系. 证明了有限幺半群的$\mathbf{k}$-线性表示等价于某个有限维箭图代数上的模，由此推知其对应的半群代数 Morita 等价于这个有限维箭图代数，见定理 4. 在此基础上，本文还考虑了交替弦模的同构类数与代数的表示型之间的关系，即问题 1. 通过半群$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$，本文构造了散射箭图代数，并利用此代数对该问题给出了肯定回答. 本文的研究使得代数表示理论更加丰富，对半群表示理论的研究及其推进也可以预期，并在未来将更加深入.

参考文献

[1] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra (Second Edition) [M]. Springer, New York, 2009.

[2] ASSEM I, SIMSON D, SKOWRONSKI A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[3] MORITA K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition [J]. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku A. 1958, 6 (150): 83–142.

[4] GABRIEL P. Sur les catégories abéliennes localement noethériennes et leurs applications aux algèbresétudiées par Dieudonné [M]. Séminaire Serre, Collège de France, Paris, 1960.

[5] GROTHENDIECK A. Sur quelques points d'algèbre homologique [J]. Tohoku Mathematical Journal. 1957, 9 (0): 119–221.

[6] AUSLANDER M. (1974) Representation theory of Artin algebras II [J]. Communications in Algebra. 1974, 1 (4): 269–310.

[7] AUSLANDER M , REITEN I. Representation theory of Artin algebras III: Almost split sequences [J]. Communications in Algebra. 1975, 3(3): 239–294

[8] AUSLANDER M, REITEN I. Representation theory of Artin algebras IV: Invariants given by almost split sequences [J]. Communications in Algebra. 1977, 5(5): 443–518.

[9] BUTLER M, RINGEL C M. Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras [J]. Communications in Algebra. 1987, 15(1–2): 145-179.

[10] JACOBSON N. Basic Algebra I (Second Edition) [M]. Freeman & Company, New York, 1910.

[11] 冯克勤，李尚志，章璞. 近世代数引论（第二版）［M］. 中国科学技术大学出版社，合肥，2009.

[12] 聂灵沼，丁石孙. 代数学引论 [M]. 高等教育出版社，北京，2000.

[13] MUNN W D. Matrix representations of semigroups [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1957, 53(1): 5-12.

[14] ROITER A V. Unboundedness of the Dimension of the Indecomposable Representations of an Algebra Which Has Infinitely Many Indecomposable Representations [J]. Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1968, 2(0): 1223-1230.
[15] SIMSON D. Functor Categories in Which Every at Object Is Projective [J]. Bullet De L'academie Polonaise des Sciences Serie des Sciences Mathematics, Astronomy, et Physics. 1974, 22(4): 375-380.
[16] RINGEL C M, TACHIKAWA H. QF-3 Rings [J]. Journal fur die reine angewandte Mathematik. 1975, 272(0): 49-72.
[17] AUSLANDER M. Large Modules over Artin Algebras [C]. In: Heller, A. and Tierney, M., Eds., Algebra, Topology, and Category Theory, Elsevier, Amsterdam, 1-17, 1976.
[18] YAMAGATA K. On Artinian Rings of Finite Representation Type [J]. Journal of Algebra. 1978, 50(2): 276-283.
[19] SIMSON D. On Large Indecomposable Modules and Right Pure Semi-Simple Rings [J]. Algebra And Discrete Mathematics. 2003, 2(2): 93-117.
[20] RINGEL C M. Report on the Brauer-Thrall Conjectures: Rojter's Theorem and the Theorem of Nazarova and Rojter (On Algorithms for Solving Vectorspace Problems I) [C]. In: Dlab, V. and Gabriel, P., Eds., Representation Theory I, Carleton University, Ottawa, 104-136, 2006.
[21] NAZAROVA L A, ROITER A V. Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer-Thrall-Vermutung [J]. Mitteilungen aus dem Mathem. 1975, 115(0): 1-153.
[22] SMALØ O S. The Inductive Step of the Second Brauer-Thrall Conjecture [J]. Canadian Journal of Mathematics. 1980, 32(2): 342-349.
[23] BAUTISTA R. On Algebras of Strongly Unbounded Representation Type [J]. Commentarii Mathematici Helvetici. 1985, 60(1): 392-399.
[24] WEN Haicun, LIU Miantao, Liu Yu-Zhe. The counting formula for indecomposable modules over string algebra [J]. AIMS Mathematics, 2024, 9(9): 24977-24988.
[25] PLAMONDON P-G. τ-tilting finite gentle algebras are representation-finite [J]. Pacific Journal of Mathematics. 2019, 302(2):709-716.
[26] LIU Yu-Zhe, ZHANG Yafeng, HUANG Zhaoyong. Gorenstein projective support τ-tilting modules over gentle algebras. 2022, http://maths.nju.edu.cn/~huangzy/gtautilt.pdf
[27] 刘雨喆, 张亚峰. A 型代数的多重张量代数表示有限的充分必要条件 [J]. 中国科学:数学, 2024 54(1): 25-38.
[28] 周建国, 刘雨喆, 赵伟. 一类 $\mathbb{A}\otimes\widetilde{\mathbb{A}}$ 型代数上的不可分解模的同构类 [J]. 理论数学, 2024, 14(4), 307-318.
[29] 周建国, 刘雨喆, 章超, 张亚峰. 一类合冲无限的自内射代数 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2024, **60**(3): no. 16719352(2025)03-0000-00.
[30] HERSCHEND M. Solution of the Clebsch-Gordan Problem for Kronecker Representations. U.U.D.M Project Report 2003, Uppsala University, 2003.
[31] MARTSINKOVSKY A, VLASSOV A. The Representation Ring of **k**[x], 2004, https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=f42add2c9ca3020a0cf7f9057a211a7b6c393005
[32] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan Problem for Representations of Quivers of Type $\widetilde{\mathbb{A}}_n$ [J]. Journal of Algebra and Its Applications. 2005, 4(5): 481-488.
[33] HERSCHEND M. Galois Coverings and the Clebsch-Gordon Problem for Quiver Representations [J]. Colloquium Mathematicum. 2007, 109(2): 193-215.
[34] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan Problem for String Algebras [J]. Journal of Pure and Applied Algebra. 2010, 214(11): 1996-2008.